

粗糙表面的加卸载分形接触解析模型

陈建江¹, 原园¹, 徐颖强²

(1. 西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 710048, 西安; 2. 西北工业大学机电学院, 710072, 西安)

摘要: 基于分形理论,建立了粗糙表面加卸载接触力学模型,推导出了单个微凸体弹性、弹塑性以及塑性变形的存在条件,获得了对应条件下微凸体加、卸载的力学表达式。根据加载终点与卸载起点真实接触面积和总接触载荷不变规则,对传统的微凸体面积密度分布函数进行变换,分别给出了加、卸载接触过程中不同频率指数微凸体的面积密度分布函数,最终得到了加、卸载接触过程中粗糙表面真实接触面积与总接触载荷之间的关系。结果表明:在一个加、卸载接触循环内,粗糙表面加、卸载接触的力学性质取决于微凸体频率指数的范围;当微凸体的最小频率指数 $n_{\min}$ 与临界弹性频率指数 n_{ec} 的关系满足 $n_{\min} + 5 \leq n_{ec}$ 时,粗糙表面在整个加卸载接触过程中呈现弹性性质;当 $n_{\min} > n_{ec}$ 、接触下压量大于微凸体自身临界下压量发生弹塑性变形时,在相同的总接触载荷条件下,卸载过程中的量纲一真实接触面积大于加载过程中的量纲一真实接触面积,且两者的差值与下压量成正比,最大量纲一差值范围为 $0 \sim 0.0858$ 。

关键词: 接触;粗糙表面;微凸体;分形;弹塑性变形

中图分类号: TH117 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2018)03-0098-13

An Analytical Model of Loading-Unloading Contact Between Rough Surfaces Based on Fractal Theory

CHEN Jianjiang¹, YUAN Yuan¹, XU Yingqiang²

(1. College of Mechanical and Precision Instrument Engineering, XI'AN University of Technology, Xi'an 710048, China;

2. School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Based on fractal theory, a loading-unloading contact mechanics model of rough surfaces is established. The existence conditions of elastic deformation, elastoplastic deformation and fully plastic deformation of single asperity are deduced. And the mechanical expressions of single asperity under loading and unloading are obtained for different deformation conditions. The traditional area density distribution function of asperities is modified according to a rule that the real contact area and total contact load at the end of loading equal the real contact area and total contact load in the inception of unloading. And the area and density distribution function of asperity's frequency index is deduced under loading and unloading conditions. Eventually, the relationship between total contact load and real contact area is obtained. The results show that the contact mechanical properties of the rough surface depend on the asperity's frequency index in a loading-unloading cycle. When asperity's frequency index $n_{\min} + 5$ is less than critical elastic frequency index n_{ec} , the rough surface shows an elastic deformation behavior in a loading-

unloading cycle. When the asperity's frequency index $n_{\min}$ is greater than the critical elastic frequency index and the deformation is greater than the critical deformation, and the real contact area in unloading process is greater than that in loading process. As the deformation increases, the non-dimensional difference between the real areas of loading and unloading is proportional to the deformation, whose range is from 0 to 0.085 8.

Keywords: contact; rough surface; asperity; fractal; elastoplastic deformation

机械结构表面在微观尺度下是凹凸不平的,由无数个尺寸不同的微凸体构成。两个真实机械表面之间的接触实际上是许多离散微凸体的接触,导致两表面间的真实接触面积远小于名义接触面积^[1],造成在相当小的接触面积上承受较大的载荷、接触面承载不均、接触刚度降低、局部表面压溃等状况^[2-3]。这些状况对机械零件表面间的摩擦、磨损、润滑、密封和传热等问题有着重要的影响。为了避免或减小这些状况对实际接触问题的影响,需要对真实粗糙表面的接触力学性能进行深入研究。

目前对于粗糙表面接触问题的研究主要有统计学方法、分形方法、确定性方法^[4]、有限元法^[5]及多尺度法^[6]等。确定性方法、有限元法和多尺度法采用对应的数值方法求解粗糙表面的接触问题,获得接触表面的接触力学规律,统计学方法和分形方法则通过统计方法和分形理论分别建立粗糙表面接触问题的接触载荷和真实接触面积的解析关系。1966年,Greenwood和Williamson首次建立了粗糙表面接触的统计模型(GW模型),推导出了真实接触面积与总接触载荷的关系^[7]。在该模型中,粗糙表面简化为随机分布在参考平面上的许多规定形状的微凸体,微凸体高度服从高斯分布,且具有相同的峰顶曲率半径,使用塑性指数作为评价弹性接触和塑性接触的标准。随后,诸多学者扩展了GW模型来处理其他粗糙表面的接触问题,例如粗糙球体的弹性接触^[8]、随机表面特性^[9]和粗糙表面塑性接触^[10]等。为了获得更准确的结果,一些学者致力于单个微凸体接触力学性能的研究,使得统计接触模型更加完善。Chang等根据微凸体塑性变形体积守恒原理,建立了粗糙表面弹塑性接触的统计模型(CEB模型),并获得了不同塑性指数条件下真实接触面积与接触载荷的关系^[11]。Lin等采用有限元方法获得了黏弹性的单球接触加卸载过程中接触面积和接触载荷的关系^[12]。Etsion等采用有限元法建立了单个微凸体与刚性平面接触的模型,获得了加卸载接触过程中单个微凸体接触面积与接触载荷之间的关系^[13-14];随后,Kadin等将该结果应用到整个粗糙表

面,建立了粗糙表面加卸载接触统计模型,结果表明:加卸载过程中微凸体可能发生塑性变形产生残余应变,导致微凸体的高度分布函数发生变化;一个接触循环内,卸载过程的真实接触面积大于加载过程的真实接触面积^[15]。

以上统计分析模型采用的是与取样长度和仪器的分辨率有关的统计参数,所以对粗糙表面的表征和分析结果不具有唯一性。为了克服统计模型的缺陷,Majumdar等使用Weierstrass-Mandelbrot函数(WM函数)来表征二维分形粗糙表面轮廓^[16-17]。随后,Majumdar和Bhushan基于WM函数提出了以分形几何为基础的二维粗糙表面接触模型(MB模型),建立了单个微凸体弹性、完全塑性的变形机制,并结合面积分布密度函数获得了真实接触面积与接触载荷之间的关系^[18]。诸多学者基于MB分形模型又提出了多种分形模型,并获得了更加准确的粗糙表面接触力学特性。Wang等对MB模型中的微凸体面积分布密度函数进行了修正,得到了MB弹性、塑性接触修正模型^[19-20]。Morag等建立了单个微凸体的弹塑性接触分形模型,解释了MB模型中微凸体由塑性变形到弹性变形的变形顺序与经典赫兹接触理论矛盾的原因,并证明微凸体临界接触面积是尺度相关的^[21]。Miao等建立了尺度相关的分形表面接触修正模型,获得了整个分形表面总的接触载荷、面积和刚度^[22]。丁雪兴等根据微凸体的变形特征、分形理论和摩擦作用,建立了基于基底长度的分形接触模型,推导出单个微凸体的临界接触面积与微凸体的基底长度有关,并获得了分形维数、接触载荷和真实接触面积的相互关系^[23]。

基于上述研究现状,本文采用分形理论建立了分形表面加卸载接触模型,推导出单个微凸体发生弹性、弹塑性和塑性变形的存在条件,以及在不同变形状态下微凸体的加、卸载规则,得到了不同微凸体分布状态下整个粗糙表面上接触载荷与真实接触面积之间的关系,以为机械零件表面的接触、摩擦、磨损以及润滑等问题的研究提供一些理论依据。

1 粗糙表面弹塑性加卸载接触力学模型

1.1 单个微凸体加载过程的力学模型

两个粗糙表面的接触问题可以简化为一个等效粗糙表面和一个刚性平面的接触问题。等效粗糙表面的形貌具有随机、多尺度及无序的性质,对应数学形式上连续、不可微及自仿射的分形特性。采用具有这些特性的 WM 函数表征二维分形表面,表达式如下

$$z(x) = G^{D-1} \sum_{n=n_{\min}}^{\infty} \frac{\cos 2\pi \gamma^n x}{\gamma^{(2-D)n}} \quad (1)$$

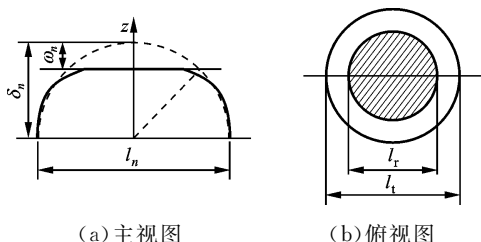
式中: x 为粗糙表面轮廓曲线上高度为 z 处的位移坐标; D 为分形维数 ($1 < D < 2$); G 为轮廓尺度参数; γ^n 为表面粗糙度的频谱,其中 γ 是大于 1 的常数,对于服从正态分布的表面,取 $\gamma = 1.5$; n 为频率指数。假设粗糙表面上的单个微凸体在接触过程中不会发生相互作用,根据式(1),频率指数为 n 的微凸体变形前的轮廓曲线^[18]为

$$z_n = G^{D-1} l_n^{2-D} \cos\left(\frac{\pi x}{l_n}\right) \quad \left(-\frac{l_n}{2} < x < \frac{l_n}{2}\right) \quad (2)$$

式中

$$l_n = \frac{1}{\gamma^n}$$

图 1 是频率指数为 n 的微凸体加载过程示意图,其中 δ_n 为微凸体高度, ω_n 为微凸体加载过程中的变形量, l_n 为微凸体基底尺寸。



(a) 主视图 (b) 俯视图

图 1 微凸体加载过程示意图

根据赫兹理论,当 $\omega_n \leq \omega_{nec}$ 时微凸体处于弹性变形状态,则加载过程弹性接触面积与接触载荷的计算公式^[11,24]如下

$$a_n = \pi R_n \omega_n \quad (3)$$

$$F_{ne} = \frac{4E\pi^{1/2}G^{D-1}}{3(l_n)^D} (a_n)^{3/2} \quad (4)$$

$$\omega_{nec} = \left(\frac{\pi KH}{2E}\right)^2 R_n \quad (5)$$

式中: K 为硬度系数,与材料的泊松比 ν 有关, $K = 0.454 + 0.41\nu$; H 为较软材料的硬度; E 为等效弹性模量。当微凸体只能发生弹性变形时,其对应的最大频率指数 n_{ec} 称为弹性临界频率指数^[24-25]。

当 $\omega_{nec} < \omega_n \leq 110\omega_{nec}$ 时,微凸体处于弹塑性变形状态,在该弹塑性变形过程中存在 2 个阶段^[13]:

在第一弹塑性变形阶段 ($\omega_{nec} < \omega_n \leq 6\omega_{nec}$),有

$$\frac{a_n}{a_{nec}} = 0.93 \left(\frac{\omega_n}{\omega_{nec}}\right)^{1.136} \quad (6)$$

$$F_{nep1} = \frac{2}{3} KH \times 1.128 2 a_{nec}^{-0.254 4} (a_n)^{1.254 4} \quad (7)$$

对于可发生弹性变形或第一弹塑性变形的微凸体,其对应的最大频率指数 n_{epc} 称为第一弹塑性临界频率指数。

在第二弹塑性变形阶段 ($6\omega_{nec} < \omega_n \leq 110\omega_{nec}$)

$$\frac{a_n}{a_{nec}} = 0.94 \left(\frac{\omega_n}{\omega_{nec}}\right)^{1.146} \quad (8)$$

$$F_{nep2} = \frac{2}{3} KH \times 1.498 8 a_{nec}^{-0.102 1} (a_n)^{1.102 1} \quad (9)$$

对于可发生弹性变形、第一弹塑性变形或第二弹塑性变形的微凸体,其对应的最大频率指数 n_{pc} 称为第二弹塑性临界频率指数。

当 $\omega_n > 110\omega_{nec}$ 时,微凸体可以发生完全塑性变形,在载荷移除后,发生完全塑性变形的微凸体是没有回复过程的,这些微凸体不计入卸载过程中接触载荷与接触面积的计算。粗糙表面的力学性质主要由具有前 6 个频率指数的微凸体决定^[24]。具有前 6 个频率指数的微凸体发生完全塑性变形时,粗糙表面在卸载之后没有回复过程,卸载过程中接触面积和接触载荷为 0。如果具有前 6 个频率指数的微凸体未发生完全塑性变形,而后续微凸体发生了完全塑性变形,则具有前 6 个频率指数的微凸体的力学特性占主导地位,后续发生完全塑性变形的微凸体对粗糙表面的力学特性影响非常小。所以在本文中,不同频率指数的微凸体在接触过程中的变形量不会超过自身弹性临界变形量的 110 倍。

1.2 单个微凸体卸载过程的力学模型

图 2 为频率指数为 n 的微凸体的卸载过程示意图,其中: R_n 为微凸体峰顶曲率半径,简称原始半径; $\omega_{n,max}$ 为微凸体加载过程中的最大变形量; $a_{n,max}$ 为微凸体变形量达到 $\omega_{n,max}$ 所对应的接触面积; R_n^0 为完全卸载时残余轮廓的峰顶曲率半径; $\omega_{n,res}$ 为完全卸载时的残余变形量,即残余轮廓与微凸体原始轮廓的高度差。

当微凸体处于弹性或弹塑性变形时,卸载过程是不同的,下面针对微凸体的变形状态建立相应的卸载规则。

(1) 弹性变形状态下的单个微凸体卸载规则。

只发生弹性变形的微凸体在卸载过程中会完全回

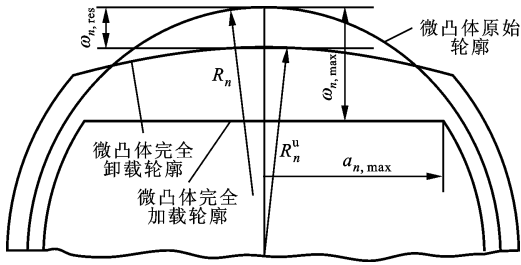


图2 微凸体卸载过程变形示意图

复,卸载后微凸体的曲率半径和高度与加载前的曲率半径和高度保持一致,则卸载过程中接触载荷和接触面积的关系如下

$$a_n^u = \pi R_n^u \omega_n^u; \quad R_n^u = R_n; \quad \omega_{n, \text{res}} = 0 \quad (10)$$

$$F_{ne}^u = \frac{4E\pi^{1/2}G^{D-1}}{3(l_n^u)^D}(a_n^u)^{3/2} \quad (11)$$

(2)弹塑性变形状态下的单个微凸体卸载规则。发生弹塑性变形的微凸体在卸载过程中不能完全回复,即 \$R_n^u \neq R_n, \delta_n^u \neq \delta_n\$。根据 Etsion 等的研究成果^[14],残余变形量 \$\omega_{n, \text{res}}\$ 与最大变形量 \$\omega_{n, \max}\$ 具有如下关系

$$\frac{\omega_{n, \text{res}}}{\omega_{n, \max}} = \left[1 - \left(\frac{\omega_{n, \max}}{\omega_{nec}} \right)^{-0.28} \right] \left[1 - \left(\frac{\omega_{n, \max}}{\omega_{nec}} \right)^{-0.69} \right] \quad (12)$$

卸载半径 \$R_n^u\$ 与原半径 \$R_n\$ 的关系为

$$\frac{R_n^u}{R_n} = 1 + 1.275 \left(\frac{E}{\sigma_y} \right)^{-0.216} \left(\frac{\omega_{n, \max}}{\omega_{nec}} - 1 \right) \quad (13)$$

式中: \$\sigma_y\$ 为材料的屈服强度。

卸载过程中的接触载荷和接触面积^[14]分别为

$$F_n^u = F_{n, \max} \left(\frac{\omega_n^u - \omega_{n, \text{res}}}{\omega_{n, \max} - \omega_{n, \text{res}}} \right)^{1.5(\omega_{n, \max}/\omega_{nec})^{-0.0331}} \quad (14a)$$

$$a_n^u = a_{n, \max} \left(\frac{\omega_n^u - \omega_{n, \text{res}}}{\omega_{n, \max} - \omega_{n, \text{res}}} \right)^{(\omega_{n, \max}/\omega_{nec})^{-0.12}} \quad (14b)$$

式中: \$F_{n, \max}\$ 和 \$a_{n, \max}\$ 分别是微凸体加载变形量为 \$\omega_{n, \max}\$ 时所对应的接触载荷和接触面积。对于发生第一弹塑性变形 (\$\omega_{nec} < \omega_{n, \max} \leq 6\omega_{nec}\$) 的微凸体,有

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_{n, \max}}{F_{nec}} &= 1.03 \left(\frac{\omega_{n, \max}}{\omega_{nec}} \right)^{1.425} \\ \frac{a_{n, \max}}{a_{nec}} &= 0.93 \left(\frac{\omega_{n, \max}}{\omega_{nec}} \right)^{1.136} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

对于发生第二弹塑性变形 (\$6\omega_{nec} < \omega_{n, \max} \leq 110\omega_{nec}\$) 的微凸体,则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_{n, \max}}{F_{nec}} &= 1.40 \left(\frac{\omega_{n, \max}}{\omega_{nec}} \right)^{1.263} \\ \frac{a_{n, \max}}{a_{nec}} &= 0.94 \left(\frac{\omega_{n, \max}}{\omega_{nec}} \right)^{1.146} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

分别将式(15)、(16)代入式(14),可得加载过程中处于第一弹塑性区和第二弹塑性区的单个微凸体卸载时的接触载荷与接触面积关系

$$F_{nep1}^u = \frac{2.06KH}{3} a_{nec} \left(\frac{\omega_{n, \max}}{\omega_{nec}} \right)^{1.425} \cdot \left(\frac{a_n^u}{0.93a_{nec}(\omega_{n, \max}/\omega_{nec})^{1.136}} \right)^{1.5(\omega_{n, \max}/\omega_{nec})^{0.0869}} \quad (17)$$

$$F_{nep2}^u = \frac{2.8KH}{3} a_{nec} \left(\frac{\omega_{n, \max}}{\omega_{nec}} \right)^{1.236} \cdot \left(\frac{a_n^u}{0.94a_{nec}(\omega_{n, \max}/\omega_{nec})^{1.146}} \right)^{1.5(\omega_{n, \max}/\omega_{nec})^{0.0869}} \quad (18)$$

1.3 微凸体面积分布密度函数

根据文献[18],分形粗糙表面上微凸体的面积分布规律与海洋中岛屿面积的分布规律相似,其面积分布密度函数为

$$n(a) = \frac{D}{2} a_1^{D/2} a^{-(D+2)/2} \quad (19)$$

真实接触面积

$$A_r = \int_0^{a_1} n(a) da = \frac{D}{2-D} a_1 \quad (20)$$

式中: \$n(a)\$ 为整个粗糙表面的微凸体面积分布密度函数; \$a_1\$ 为粗糙表面上所有微凸体的最大接触面积。

若假设频率指数为 \$n\$ 的微凸体的面积密度分布函数为 \$n_n(a)\$,且满足

$$n_n(a) = Mn(a) = M \frac{D}{2} a_{n1}^{D/2} a^{-(D+2)/2}$$

代入式(20)得

$$A_r = \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \int_0^{a_{n1}} n_n(a) da = M \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \int_0^{a_{n1}} n(a) da = M \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \frac{D}{2-D} a_{n1} \quad (21)$$

式中: \$a_{n1}\$ 对应频率指数为 \$n\$ 的众多微凸体中的最大接触面积。联立式(20)和式(21),可得^[24]

$$M = a_1 / \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} a_{n1} \quad (22)$$

式中: \$a_1 = \max(a_{n1})\$; \$n_{\min} < n < n_{\max}\$。

1.4 加卸载真实接触面积和接触载荷

1.4.1 加载过程

(1)粗糙表面频率指数为 \$n_{\min} < n < n_{ec}\$ 的微凸体只发生弹性变形,加载过程中的真实接触面积 \$A_{r1}\$、总接触载荷 \$F_{r1}\$ 分别为

$$A_{r1} = \sum_{n=n_{\min}}^{n_{ec}} \int_0^{a_{n1}} Mn(a) da = \frac{DM}{2-D} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{ec}} a_{n1} \quad (23a)$$

$$F_{r1} = \sum_{n=n_{\min}}^{n_{ec}} \int_0^{a_{nl}} F_{ne} Mn(a) da = \frac{DM}{3-D} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{ec}} \left[\frac{4E\pi^{1/2} G^{D-1}}{3(l_n)^D} a_{nl}^{3/2} \right] \quad (23b)$$

(2)粗糙表面频率指数为 $n_{ec} < n < n_{epc}$ 的微凸体可能发生弹性变形或第一弹塑性变形,加载过程中的真实接触面积 A_{r2} 为

$$A_{r2} = A_{re} + A_{rep1} \quad (24a)$$

式中: A_{re} 和 A_{rep1} 分别为加载过程中发生弹性变形和第一弹塑性变形的微凸体的真实接触面积。

$$A_{re} = \sum_{n=n_{ec}+1}^{n_{epc}} \int_0^{a_{nec}} Mn(a) ada = \frac{DM}{2-D} \sum_{n=n_{ec}+1}^{n_{epc}} [a_{nec}^{(2-D)/2} a_{nl}^{D/2}]$$

$$A_{rep1} = \sum_{n=n_{ec}+1}^{n_{epc}} \int_{a_{nec}}^{a_{nl}} Mn(a) ada = \frac{DM}{2-D} \sum_{n=n_{ec}+1}^{n_{epc}} \{ [a_{nl}^{(2-D)/2} - a_{nec}^{(2-D)/2}] a_{nl}^{D/2} \}$$

总接触载荷 F_{r2} 为

$$F_{r2} = F_{re} + F_{rep1} \quad (24b)$$

式中: F_{re} 和 F_{rep1} 分别为加载过程中发生弹性变形和第一弹塑性变形的微凸体的总接触载荷。

$$F_{re} = \sum_{n=n_{ec}+1}^{n_{epc}} \int_0^{a_{nec}} F_{ne} Mn(a) ada = \frac{DM}{3-D} \sum_{n=n_{ec}+1}^{n_{epc}} \left[\frac{4E\pi^{1/2} G^{D-1}}{3(l_n)^D} a_{nec}^{(3-D)/2} a_{nl}^{D/2} \right]$$

$$F_{rep1} = \sum_{n=n_{ec}+1}^{n_{epc}} \int_{a_{nec}}^{a_{nl}} F_{nep1} Mn(a) da = \frac{DMKH}{3} \sum_{n=n_{ec}+1}^{n_{epc}} \left\{ \frac{1.128}{1.254} \frac{2a_{nec}^{-0.254}}{4-0.5D} [a_{nl}^{1.254} a_{nec}^{-0.5D} - a_{nec}^{1.254} a_{nec}^{-0.5D}] a_{nl}^{D/2} \right\}$$

(3)粗糙表面频率指数为 $n_{epc} < n < n_{pc}$ 的微凸体可能发生弹性变形、第一弹塑性变形或第二弹塑性变形,加载过程中的真实接触面积 A_{r3} 为

$$A_{r3} = A_{re} + A_{rep1} + A_{rep2} \quad (25a)$$

式中: A_{rep2} 为加载过程中发生第二弹塑性变形的微凸体的真实接触面积。

$$A_{re} = \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{pc}} \int_0^{a_{nec}} Mn(a) ada = \frac{DM}{2-D} \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{pc}} [a_{nec}^{(2-D)/2} a_{nl}^{D/2}]$$

$$A_{rep1} = \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{pc}} \int_{a_{nec}}^{a_{nepc}} Mn(a) ada =$$

$$\frac{DM}{2-D} \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{pc}} \{ [(7.119/7)a_{nec}^{(2-D)/2} - a_{nec}^{(2-D)/2}] a_{nl}^{D/2} \}$$

$$A_{rep2} = \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{pc}} \int_{a_{nepc}}^{a_{nl}} Mn(a) ada =$$

$$\frac{DM}{2-D} \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{pc}} \{ [a_{nl}^{(2-D)/2} - (7.119/7)a_{nec}^{(2-D)/2}] a_{nl}^{D/2} \}$$

总接触载荷 F_{r3} 为

$$F_{r3} = F_{re} + F_{rep1} + F_{rep2} \quad (25b)$$

式中: F_{rep2} 为加载过程发生第二弹塑性变形的微凸体的接触载荷。

$$F_{re} = \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{pc}} \int_0^{a_{nec}} F_{ne} Mn(a) da =$$

$$\frac{DM}{3-D} \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{pc}} \left[\frac{4E\pi^{1/2} G^{D-1}}{3l_n^D} a_{nec}^{(3-D)/2} a_{nl}^{D/2} \right]$$

$$F_{rep1} = \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{pc}} \int_{a_{nec}}^{a_{nepc}} F_{nep1} Mn(a) da =$$

$$\frac{DMKH}{3} \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{pc}} \left\{ \frac{1.128}{1.254} \frac{2a_{nec}^{-0.254}}{4-0.5D} \cdot [(7.119/7)a_{nec}^{1.254} a_{nec}^{-0.5D} - a_{nec}^{1.254} a_{nec}^{-0.5D}] a_{nl}^{D/2} \right\}$$

$$F_{rep2} = \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{pc}} \int_{a_{nepc}}^{a_{nl}} F_{nep2} Mn(a) da =$$

$$\frac{DMKH}{3} \sum_{n=n_{epc}+1}^{n_{pc}} \left\{ \frac{1.498}{1.102} \frac{8a_{nec}^{-0.102}}{1-0.5D} \cdot [a_{nl}^{1.102} a_{nec}^{-1-0.5D} - (7.119/7)a_{nec}^{1.102} a_{nec}^{-1-0.5D}] a_{nl}^{D/2} \right\}$$

(4)粗糙表面频率指数为 $n > n_{pc}$ 的微凸体在接触过程中的变形量不会超过自身弹性临界变形量的110倍,此阶段微凸体可能发生弹性变形、第一弹塑性变形或第二弹塑性变形,加载过程的真实接触面积 A_{r4} 为

$$A_{r4} = A_{re} + A_{rep1} + A_{rep2} \quad (26a)$$

$$A_{re} = \sum_{n=n_{pc}+1}^{n_{\max}} \int_0^{a_{nec}} Mn(a) ada =$$

$$\frac{DM}{2-D} \sum_{n=n_{pc}+1}^{n_{\max}} [a_{nec}^{(2-D)/2} a_{nl}^{D/2}]$$

$$A_{rep1} = \sum_{n=n_{pc}+1}^{n_{\max}} \int_{a_{nec}}^{a_{nepc}} Mn(a) ada = \frac{DM}{2-D} \cdot$$

$$\sum_{n=n_{pc}+1}^{n_{\max}} \{ [(7.119/7)a_{nec}^{(2-D)/2} - a_{nec}^{(2-D)/2}] a_{nl}^{D/2} \}$$

$$A_{\text{rep2}} = \sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}} \int_{a_{\text{nepc}}}^{a_{\text{npc}}} Mn(a) da =$$

$$\frac{DM}{2-D} \sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}} \left[(205.3827 a_{\text{nec}})^{(2-D)/2} - \right.$$

$$\left. (7.1197 a_{\text{nec}})^{(2-D)/2} \right] a_{\text{nl}}^{D/2}$$

总接触载荷 F_{r4} 为

$$F_{\text{r4}} = F_{\text{re}} + F_{\text{rep1}} + F_{\text{rep2}} \quad (26b)$$

$$F_{\text{re}} = \sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}} \int_0^{a_{\text{nec}}} F_{\text{ne}} Mn(a) da =$$

$$\frac{DM}{3-D} \sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}} \left[\frac{4E\pi^{1/2} G^{D-1}}{3l_n^D} a_{\text{nec}}^{(3-D)/2} a_{\text{nl}}^{D/2} \right]$$

$$F_{\text{rep1}} = \sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}} \int_{a_{\text{nec}}}^{a_{\text{nepc}}} F_{\text{nepl}} Mn(a) da =$$

$$\frac{DMKH}{3} \sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}} \left\{ \frac{1.1282 a_{\text{nec}}^{-0.2544}}{1.2544 - 0.5D} \cdot \right.$$

$$\left. [(7.1197 a_{\text{nec}})^{1.2544-0.5D} - a_{\text{nec}}^{1.2544-0.5D}] a_{\text{nl}}^{D/2} \right\}$$

$$F_{\text{rep2}} = \sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}} \int_{a_{\text{nepc}}}^{a_{\text{npc}}} F_{\text{nepl}} Mn(a) da =$$

$$\frac{DMKH}{3} \sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}} \left\{ \frac{1.4988 a_{\text{nec}}^{-0.1021}}{1.1021 - 0.5D} \cdot \right.$$

$$\left. [(205.3827 a_{\text{nec}})^{1.1021-0.5D} - (7.1197 a_{\text{nec}})^{1.1021-0.5D}] a_{\text{nl}}^{D/2} \right\}$$

由式(23)~(26),可得弹塑性接触粗糙表面加载过程中的真实接触面积 A_{r} 和总接触载荷 F_{r}

$$A_{\text{r}} = A_{\text{r1}} + A_{\text{r2}} + A_{\text{r3}} + A_{\text{r4}} \quad (27a)$$

$$F_{\text{r}} = F_{\text{r1}} + F_{\text{r2}} + F_{\text{r3}} + F_{\text{r4}} \quad (27b)$$

1.4.2 卸载过程 假设微凸体卸载结束时,粗糙表面上微凸体的分布形式仍然满足分形特征,则卸载后粗糙表面微凸体面积分布密度函数为

$$n_n^u(a^u) = H_n \frac{D}{2} (a_{\text{nl}}^u)^{D/2} (a^u)^{-(D+2)/2} \quad (28)$$

式中: a_{nl}^u 为频率指数为 n 的微凸体在卸载过程中的最大接触面积; H_n 为卸载后频率指数为 n 的微凸体的面积分布密度函数待定系数。

(1)粗糙表面频率指数为 $n_{\text{min}} < n < n_{\text{ec}}$ 的微凸体只发生弹性变形,粗糙表面加载结束时的真实接触面积与卸载开始时的真实接触面积相同,可得

$$\sum_{n=n_{\text{min}}}^{n_{\text{ec}}} \int_0^{a_{\text{nl}}} Mn(a) da = \sum_{n=n_{\text{min}}}^{n_{\text{ec}}} \int_0^{a_{\text{nl}}} n_{\text{ne}}^u(a^u) a^u da^u \quad (29)$$

则待定系数

$$H_{\text{ne}}^1 = M, \quad n_{\text{min}} < n < n_{\text{ec}} \quad (30)$$

粗糙表面加载结束时的总接触载荷与卸载开始时的总接触载荷相同,于是有

$$\sum_{n=n_{\text{min}}}^{n_{\text{ec}}} \int_0^{a_{\text{nec}}} F_{\text{ne}} Mn(a) da = \sum_{n=n_{\text{min}}}^{n_{\text{ec}}} \int_0^{a_{\text{nec}}} F_{\text{ne}}^u n_{\text{ne}}^u(a^u) da^u \quad (31)$$

则卸载过程的真实接触面积 A_{r1}^u 和总接触载荷 F_{r1}^u 分别为

$$A_{\text{r1}}^u = \sum_{n=n_{\text{min}}}^{n_{\text{ec}}} \int_0^{a_{\text{nl}}^u} n_{\text{ne}}^u(a^u) a^u da^u = \frac{D}{2-D} \sum_{n=n_{\text{min}}}^{n_{\text{ec}}} (H_{\text{ne}}^1 a_{\text{nl}}^u) \quad (32a)$$

$$F_{\text{r1}}^u = \sum_{n=n_{\text{min}}}^{n_{\text{ec}}} \int_0^{a_{\text{nl}}^u} F_{\text{ne}}^u n_{\text{ne}}^u(a^u) da^u =$$

$$\frac{D}{3-D} \sum_{n=n_{\text{min}}}^{n_{\text{ec}}} \left[\frac{4E\pi^{1/2} G^{D-1}}{3(l_n^u)^D} H_{\text{ne}}^1 (a_{\text{nl}}^u)^{3/2} \right] \quad (32b)$$

(2)粗糙表面频率指数为 $n_{\text{ec}} < n < n_{\text{epc}}$ 的微凸体可能发生弹性变形或第一弹塑性变形,卸载过程的真实接触面积 A_{r2}^u 和总接触载荷 F_{r2}^u 分别为

$$A_{\text{r2}}^u = A_{\text{re}}^u + A_{\text{rep1}}^u \quad (33a)$$

$$F_{\text{r2}}^u = F_{\text{re}}^u + F_{\text{rep1}}^u \quad (33b)$$

式中: A_{re}^u 和 A_{rep1}^u 分别是弹性卸载接触面积和第一弹塑性卸载接触面积; F_{re}^u 和 F_{rep1}^u 分别为弹性卸载接触载荷和第一弹塑性卸载接触载荷。

加载结束与卸载开始时,对应的真实接触面积相等,可得

$$\sum_{n=n_{\text{ec}}}^{n_{\text{epc}}} \int_0^{a_{\text{nec}}} Mn(a) da = \sum_{n=n_{\text{ec}}}^{n_{\text{epc}}} \int_0^{a_{\text{nec}}} n_{\text{ne}}^u(a^u) a^u da^u =$$

$$\sum_{n=n_{\text{ec}}}^{n_{\text{epc}}} \int_0^{a_{\text{nec}}} H_{\text{ne}}^2 \frac{D}{2} (a_{\text{nl}}^u)^{D/2} (a^u)^{-(D+2)/2} a^u da^u \quad (34)$$

$$\sum_{n=n_{\text{ec}}}^{n_{\text{epc}}} \int_{a_{\text{nec}}}^{a_{\text{nl}}} Mn(a) da = \sum_{n=n_{\text{ec}}}^{n_{\text{epc}}} \int_0^{a_{\text{nl}}} n_{\text{nepl}}^u(a^u) a^u da^u =$$

$$\sum_{n=n_{\text{ec}}}^{n_{\text{epc}}} \int_0^{a_{\text{nl}}} H_{\text{nepl}}^2 \frac{D}{2} (a_{\text{nl}}^u)^{D/2} (a^u)^{-(D+2)/2} a^u da^u \quad (35)$$

式中: H_{ne} 、 H_{nepl} 为分布密度函数待定系数,推导可得

$$H_{\text{ne}}^2 = \frac{Ma_{\text{nl}}^{D/2}}{a_{\text{nec}}^{D/2}} \quad (36a)$$

$$H_{\text{nepl}}^2 = M \frac{a_{\text{nl}}^{(2-D)/2} - a_{\text{nec}}^{(2-D)/2}}{a_{\text{nl}}^{(2-D)/2}} \quad (36b)$$

将式(36)代入式(28),可获得卸载状态下频率指数为 n 的微凸体的弹性面积密度分布函数 n_{ne}^u 和第一弹塑性面积密度分布函数 n_{nepl}^u 。于是,卸载过程中真实接触面积和总接触载荷为

$$\begin{aligned}
A_{\text{re}}^{\text{u}} &= \sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} \int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}} n_{\text{ne}}^{\text{u}}(a^{\text{u}}) a^{\text{u}} da^{\text{u}} = \frac{D}{2-D} \sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} H_{\text{ne}}^2 a_{\text{nl}}^{\text{u}} \\
A_{\text{repl}}^{\text{u}} &= \sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} \int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}} n_{\text{nepl}}^{\text{u}}(a^{\text{u}}) a^{\text{u}} da^{\text{u}} = \\
&\quad \frac{D}{2-D} \sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} H_{\text{nepl}}^2 a_{\text{nl}}^{\text{u}} \\
F_{\text{re}}^{\text{u}} &= \sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} \int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}} F_{\text{ne}}^{\text{u}} n_{\text{ne}}^{\text{u}}(a^{\text{u}}) da^{\text{u}} = \\
&\quad \frac{D}{3-D} \sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} \left[\frac{4E\pi^{1/2} G^{D-1}}{3(l_n^{\text{u}})^{\text{D}}} H_{\text{ne}}^2 (a_{\text{nl}}^{\text{u}})^{3/2} \right] \\
F_{\text{repl}}^{\text{u}} &= \sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} \int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}} F_{\text{nepl}}^{\text{u}} n_{\text{nepl}}^{\text{u}}(a^{\text{u}}) da^{\text{u}} = \frac{1.03DKH}{3} \cdot \\
&\quad \sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} \left\{ H_{\text{nepl}}^2 0.93^{1-1.5(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}} \cdot \right. \\
&\quad \left[1.5 \left(\frac{\omega_{n,\text{max}}}{\omega_{\text{nec}}} \right)^{0.0869} - \frac{D}{2} \right]^{-1} \cdot \\
&\quad \left(\frac{\omega_{n,\text{max}}}{\omega_{\text{nec}}} \right)^{1.425-1.704(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}} \cdot \\
&\quad \left. a_{\text{nec}}^{1-1.5(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}} (a_{\text{nl}}^{\text{u}})^{1.5(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}} \right\}
\end{aligned}$$

在理论上,粗糙表面加载结束时的总接触载荷与卸载初始的总接触载荷相等,即 $F_{\text{re}} = F_{\text{re}}^{\text{u}}, F_{\text{repl}} = F_{\text{repl}}^{\text{u}}$ 。但是,式(12)与式(14)是根据有限元结果拟合而成的,与理论数值解存在一定误差^[14],导致接触表面加载结束时的总接触载荷与卸载初始时的总接触载荷不相等。为避免出现这一问题,引入载荷误差修正系数 K_n ,则总接触载荷变为

$$\begin{aligned}
F_{\text{re}}^{\text{u}} &= \sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} \int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}} K_{\text{ne}}^2 F_{\text{ne}}^{\text{u}} n_{\text{ne}}^{\text{u}}(a^{\text{u}}) da^{\text{u}} \\
F_{\text{repl}}^{\text{u}} &= \sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} \int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}} K_{\text{nepl}}^2 F_{\text{nepl}}^{\text{u}} n_{\text{nepl}}^{\text{u}}(a^{\text{u}}) da^{\text{u}}
\end{aligned}$$

在加载结束卸载初始时刻,加载总接触载荷与卸载总接触载荷相等,即

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} \int_0^{a_{\text{nec}}} F_{\text{ne}} M n(a) da = \\
&\sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} \int_0^{a_{\text{nec}}} K_{\text{ne}}^2 F_{\text{ne}}^{\text{u}} n_{\text{ne}}^{\text{u}}(a^{\text{u}}) da^{\text{u}} \quad (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} \int_{a_{\text{nec}}}^{a_{\text{nl}}} F_{\text{nepl}} M n(a) da = \\
&\sum_{n=n_{\text{ec}}+1}^{n_{\text{epc}}} \int_0^{a_{\text{nl}}} K_{\text{nepl}}^2 F_{\text{nepl}}^{\text{u}} n_{\text{nepl}}^{\text{u}}(a^{\text{u}}) da^{\text{u}} \quad (38)
\end{aligned}$$

对应的载荷误差修正系数

$$K_{\text{ne}}^2 = 1 \quad (39a)$$

$$\begin{aligned}
K_{\text{nepl}}^2 &= \frac{1.1282Ma_{\text{nec}}^{-0.2544}}{1.2544-0.5D} \left[1.5 \left(\frac{\omega_{n,\text{max}}}{\omega_{\text{nec}}} \right)^{0.0869} - \frac{D}{2} \right] \cdot \\
&\quad \left[1.03H_{\text{nepl}}^2 \left(\frac{\omega_{n,\text{max}}}{\omega_{\text{nec}}} \right)^{1.425-1.704(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}} \right]^{-1} \cdot \\
&\quad \frac{0.93^{1.5(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}} (a_{\text{nl}}^{1.2544-0.5D} - a_{\text{nec}}^{1.2544-0.5D})}{a_{\text{nec}}^{1-1.5(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}} a_{\text{nl}}^{1.5(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}-D/2}} \quad (39b)
\end{aligned}$$

(3)频率指数为 $n_{\text{epc}} < n < n_{\text{pc}}$ 的微凸体可能发生弹性变形、第一弹塑性变形或第二弹塑性变形,卸载过程的真实接触面积 A_{r3}^{u} 、总接触载荷 F_{r3}^{u} 分别为

$$A_{\text{r3}}^{\text{u}} = A_{\text{re}}^{\text{u}} + A_{\text{repl}}^{\text{u}} + A_{\text{rep2}}^{\text{u}} \quad (40a)$$

$$F_{\text{r3}}^{\text{u}} = F_{\text{re}}^{\text{u}} + F_{\text{repl}}^{\text{u}} + F_{\text{rep2}}^{\text{u}} \quad (40b)$$

式中: $A_{\text{rep2}}^{\text{u}}, F_{\text{rep2}}^{\text{u}}$ 分别为第二弹塑性卸载接触面积和第二弹塑性卸载接触载荷。

同理,对应的分布函数修正系数

$$H_{\text{ne}}^3 = \frac{Ma_{\text{nl}}^{D/2}}{a_{\text{nec}}^{D/2}} \quad (41a)$$

$$H_{\text{nepl}}^3 = M \frac{[(7.1197a_{\text{nec}})^{(2-D)/2} - a_{\text{nec}}^{(2-D)/2}] a_{\text{nl}}^{D/2}}{7.1197a_{\text{nec}}} \quad (41b)$$

$$H_{\text{rep2}}^3 = M \frac{a_{\text{nl}}^{(2-D)/2} - (7.1197a_{\text{nec}})^{(2-D)/2}}{a_{\text{nl}}^{(2-D)/2}} \quad (41c)$$

卸载过程中真实接触面积和总接触载荷分别为

$$\begin{aligned}
A_{\text{re}}^{\text{u}} &= \sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\text{pc}}} \int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}} n_{\text{ne}}^{\text{u}}(a^{\text{u}}) a^{\text{u}} da^{\text{u}} = \\
&\quad \frac{D}{2-D} \sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\text{pc}}} (H_{\text{ne}}^3 a_{\text{nl}}^{\text{u}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{\text{repl}}^{\text{u}} &= \sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\text{pc}}} \int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}} n_{\text{nepl}}^{\text{u}}(a^{\text{u}}) a^{\text{u}} da^{\text{u}} = \\
&\quad \frac{D}{2-D} \sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\text{pc}}} (H_{\text{nepl}}^3 a_{\text{nl}}^{\text{u}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{\text{rep2}}^{\text{u}} &= \sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\text{pc}}} \int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}} n_{\text{nepl2}}^{\text{u}}(a^{\text{u}}) a^{\text{u}} da^{\text{u}} = \\
&\quad \frac{D}{2-D} \sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\text{pc}}} (H_{\text{nepl2}}^3 a_{\text{nl}}^{\text{u}})
\end{aligned}$$

$$F_{\text{re}}^{\text{u}} = \sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\text{pc}}} \int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}} K_{\text{ne}}^3 F_{\text{ne}}^{\text{u}} n_{\text{ne}}^{\text{u}}(a^{\text{u}}) da^{\text{u}} =$$

$$\frac{D}{3-D} \sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\text{pc}}} \left[K_{\text{ne}}^3 \frac{4E\pi^{1/2} G^{D-1}}{3(l_n^{\text{u}})^{\text{D}}} H_{\text{ne}}^3 (a_{\text{nl}}^{\text{u}})^{3/2} \right]$$

$$F_{\text{repl}}^{\text{u}} = \sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\text{pc}}} \int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}} K_{\text{nepl}}^3 F_{\text{nepl}}^{\text{u}} n_{\text{nepl}}^{\text{u}}(a^{\text{u}}) da^{\text{u}} =$$

$$\frac{1.03DKH}{3} \sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\text{pc}}} \left\{ K_{\text{nepl}}^3 H_{\text{nepl}}^3 0.93^{1-1.5(\omega_{\text{ec}}/\omega_{\text{ec}})^{0.0869}} \cdot \right.$$

$$\left[1.5\left(\frac{6\omega_{\text{ec}}}{\omega_{\text{ec}}}\right)^{0.0869}-\frac{D}{2}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{6\omega_{\text{ec}}}{\omega_{\text{ec}}}\right)^{1.425-1.704(6\omega_{\text{ec}}/\omega_{\text{ec}})^{0.0869}}\cdot a_{\text{nec}}^{1-1.5(6\omega_{\text{ec}}/\omega_{\text{ec}})^{0.0869}}(a_{\text{nl}}^{\text{u}})^{1.5(6\omega_{\text{ec}}/\omega_{\text{ec}})^{0.0869}}\Big\}=\\ \frac{0.424\ 2DKH}{3}\sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\text{pc}}}\left\{K_{\text{nep1}}^3H_{\text{nep1}}^3\cdot\left[1.752\ 7-\frac{D}{2}\right]^{-1}a_{\text{nec}}^{-0.752\ 7}(a_{\text{nl}}^{\text{u}})^{1.752\ 7}\right\}\\ F_{\text{rep2}}^{\text{u}}=\sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\text{pc}}}\int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}}K_{\text{nep2}}^3F_{\text{nep2}}^{\text{u}}n_{\text{nep2}}^{\text{u}}(a^{\text{u}})\text{d}a^{\text{u}}=\\ \frac{1.4DKH}{3}\sum_{n=n_{\text{epc}}+1}^{n_{\text{pc}}}\left\{K_{\text{nep2}}^3H_{\text{nep2}}^30.94^{-1.5(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}}\cdot\left[1.5\left(\frac{\omega_{n,\text{max}}}{\omega_{\text{nec}}}\right)^{0.0869}-\frac{D}{2}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{\omega_{n,\text{max}}}{\omega_{\text{nec}}}\right)^{1.263-1.719(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}}\cdot a_{\text{nec}}^{1-1.5(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}}(a_{\text{nl}}^{\text{u}})^{1.5(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}}\right\}$$

同理,对应的载荷修正系数为

$$K_{\text{ne}}^3=1\tag{42a}\\ K_{\text{nep1}}^3=\frac{1.128\ 2Ma_{\text{nec}}^{-0.254\ 4}}{1.254\ 4-0.5D}a_{\text{nl}}^{D/2}\cdot\left[0.424\ 2H_{\text{nep1}}\left(1.752\ 7-\frac{D}{2}\right)^{-1}a_{\text{nec}}^{-0.752\ 7}\right]^{-1}\cdot\frac{(7.119\ 7a_{\text{nec}})^{1.254\ 4-0.5D}-a_{\text{nec}}^{1.254\ 4-0.5D}}{(7.119\ 7a_{\text{nec}})^{1.752\ 7}}\tag{42b}\\ K_{\text{nep2}}^3=\frac{1.498\ 8Ma_{\text{nec}}^{-0.102\ 1}}{1.1021-0.5D}\left[1.5\left(\frac{\omega_{n,\text{max}}}{\omega_{\text{nec}}}\right)^{0.0869}-\frac{D}{2}\right]\cdot\left[1.4H_{\text{nep2}}^3\left(\frac{\omega_{n,\text{max}}}{\omega_{\text{nec}}}\right)^{1.263-1.719(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}}\right]^{-1}\cdot\frac{0.94^{1.5(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}}}{a_{\text{nec}}^{1-1.5(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}}a_{\text{nl}}^{1.5(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}-D/2}}\cdot\frac{(a_{\text{nl}}^{1.102\ 1-0.5D}-(7.119\ 7a_{\text{nec}})^{1.102\ 1-0.5D})}{a_{\text{nec}}^{1-1.5(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}}a_{\text{nl}}^{1.5(\omega_{n,\text{max}}/\omega_{\text{nec}})^{0.0869}-D/2}}\tag{42c}$$

(4)频率指数为 $n>n_{\text{pc}}$ 的微凸体的变形量不会超过自身弹性临界变形量的 110 倍。微凸体可能发生弹性变形、第一弹塑性变形或第二弹塑性变形,卸载过程的真实接触面积 A_{r4}^{u} 、总接触载荷 F_{r4}^{u} 分别为

$$A_{\text{r4}}^{\text{u}}=A_{\text{re}}^{\text{u}}+A_{\text{rep1}}^{\text{u}}+A_{\text{rep2}}^{\text{u}}\tag{43a}$$

$$F_{\text{r4}}^{\text{u}}=F_{\text{re}}^{\text{u}}+F_{\text{rep1}}^{\text{u}}+F_{\text{rep2}}^{\text{u}}\tag{43b}$$

同理,对应的分布函数修正系数为

$$H_{\text{ne}}^4=\frac{Ma_{\text{nl}}^{D/2}}{a_{\text{nec}}^{D/2}}\tag{44a}$$

$$H_{\text{nep1}}^4=M\frac{[(7.119\ 7a_{\text{nec}})^{(2-D)/2}-a_{\text{nec}}^{(2-D)/2}]a_{\text{nl}}^{D/2}}{7.119\ 7a_{\text{nec}}}\tag{44b}$$

$$H_{\text{nep2}}^4=\left[(205.382\ 7a_{\text{nec}})^{(2-D)/2}-(7.119\ 7a_{\text{nec}})^{(2-D)/2}\right]\frac{Ma_{\text{nl}}^{D/2}}{205.382\ 7a_{\text{nec}}}\tag{44c}$$

对应的载荷修正系数

$$K_{\text{ne}}^4=1\tag{45a}$$

$$K_{\text{nep1}}^4=\frac{1.128\ 2Ma_{\text{nec}}^{-0.254\ 4}}{1.254\ 4-0.5D}a_{\text{nl}}^{D/2}\cdot\left[0.424\ 2H_{\text{nep1}}^4\left(1.752\ 7-\frac{D}{2}\right)^{-1}a_{\text{nec}}^{-0.752\ 7}\right]^{-1}\cdot\frac{(7.119\ 7a_{\text{nec}})^{1.254\ 4-0.5D}-a_{\text{nec}}^{1.254\ 4-0.5D}}{(7.119\ 7a_{\text{nec}})^{1.752\ 7}}\tag{45b}$$

$$K_{\text{nep2}}^4=\frac{1.498\ 8Ma_{\text{nec}}^{-0.102\ 1}}{1.102\ 1-0.5D}a_{\text{nl}}^{D/2}\cdot\left[0.003\ 2H_{\text{nep2}}^4\left(2.568-\frac{D}{2}\right)^{-1}a_{\text{nec}}^{-1.568}\right]^{-1}\cdot\frac{(205.382\ 7a_{\text{nec}})^{1.102\ 1-0.5D}-(7.119\ 7a_{\text{nec}})^{1.102\ 1-0.5D}}{(205.382\ 7a_{\text{nec}})^{2.568}}\tag{45c}$$

卸载过程中的真实接触面积和总接触载荷分别为

$$A_{\text{re}}^{\text{u}}=\sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}}\int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}}n_{\text{ne}}^{\text{u}}(a^{\text{u}})a^{\text{u}}\text{d}a^{\text{u}}=\frac{D}{2-D}\sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}}(H_{\text{ne}}^4a_{\text{nl}}^{\text{u}})\\ A_{\text{rep1}}^{\text{u}}=\sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}}\int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}}n_{\text{nep1}}^{\text{u}}(a^{\text{u}})a^{\text{u}}\text{d}a^{\text{u}}=\frac{D}{2-D}\sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}}(H_{\text{nep1}}^4a_{\text{nl}}^{\text{u}})\\ A_{\text{rep2}}^{\text{u}}=\sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}}\int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}}n_{\text{nep2}}^{\text{u}}(a^{\text{u}})a^{\text{u}}\text{d}a^{\text{u}}=\frac{D}{2-D}\sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}}(H_{\text{nep2}}^4a_{\text{nl}}^{\text{u}})\\ F_{\text{re}}^{\text{u}}=\sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}}\int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}}K_{\text{ne}}^4F_{\text{ne}}^{\text{u}}n_{\text{ne}}^{\text{u}}(a^{\text{u}})\text{d}a^{\text{u}}=\\ \frac{D}{3-D}\sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}}\left(K_{\text{ne}}^4\frac{4E\pi^{1/2}G^{D-1}}{3(I_n^{\text{u}})^{\text{D}}}H_{\text{ne}}^4(a_{\text{nl}}^{\text{u}})^{3/2}\right)\\ F_{\text{rep1}}^{\text{u}}=\sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}}\int_0^{a_{\text{nl}}^{\text{u}}}K_{\text{nep1}}^4F_{\text{nep1}}^{\text{u}}n_{\text{nep1}}^{\text{u}}(a^{\text{u}})\text{d}a^{\text{u}}=\\ \frac{1.03DKH}{3}\sum_{n=n_{\text{pc}}+1}^{n_{\text{max}}}\left\{K_{\text{nep1}}^4H_{\text{nep1}}^40.93^{-1.5(6\omega_{\text{ec}}/\omega_{\text{ec}})^{0.0869}}\cdot\left[1.5\left(\frac{6\omega_{\text{ec}}}{\omega_{\text{ec}}}\right)^{0.0869}-\frac{D}{2}\right]^{-1}\cdot\right.$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{6\omega_{ec}}{\omega_{ec}} \right)^{1.425-1.704(6\omega_{ec}/\omega_{ec})^{0.0869}} \cdot \\
& a_{nec}^{1-1.5(6\omega_{ec}/\omega_{ec})^{0.0869}} (a_{nl}^u)^{1.5(6\omega_{ec}/\omega_{ec})^{0.0869}} \Big\} = \\
& \frac{0.424}{3} \frac{2DKH}{3} \sum_{n=n_{pc}+1}^{n_{max}} \left\{ K_{nep1}^4 H_{nep1}^4 \left[1.7527 - \frac{D}{2} \right]^{-1} \cdot \right. \\
& \quad \left. a_{nec}^{-0.7527} (a_{nl}^u)^{1.7527} \right\} \\
& F_{rep2}^u = \sum_{n=n_{pc}+1}^{n_{max}} \int_0^{a_{nl}^u} K_{nep2}^4 F_{nep2}^u n_{nep2}^u (a^u) da^u = \\
& \frac{1.4DKH}{3} \sum_{n=n_{pc}+1}^{n_{max}} \left\{ K_{nep2}^4 H_{nep2}^4 0.94^{-1.5(110\omega_{ec}/\omega_{ec})^{0.0869}} \cdot \right. \\
& \quad \left[1.5 \left(\frac{110\omega_{ec}}{\omega_{ec}} \right)^{0.0869} - \frac{D}{2} \right]^{-1} \cdot \\
& \quad \left(\frac{110\omega_{ec}}{\omega_{ec}} \right)^{1.263-1.719(110\omega_{ec}/\omega_{ec})^{0.0869}} \cdot \\
& \quad \left. a_{nec}^{1-1.5(110\omega_{ec}/\omega_{ec})^{0.0869}} (a_{nl}^u)^{1.5(110\omega_{ec}/\omega_{ec})^{0.0869}} \right\} = \\
& \frac{0.003}{3} \frac{2DKH}{3} \sum_{n=n_{pc}+1}^{n_{max}} \left\{ K_{nep2}^4 H_{nep2}^4 \left[2.568 - \frac{D}{2} \right]^{-1} \cdot \right. \\
& \quad \left. a_{nec}^{-1.568} (a_{nl}^u)^{2.568} \right\}
\end{aligned}$$

通过上述推导,可得频率指数为 $n_{min} < n < n_{ec}$ 的微凸体的卸载过程分布函数修正系数 H_{ne}^1 , 频率指数为 $n_{ec} < n < n_{epc}$ 的微凸体的分布函数修正系数 H_{ne}^2 、 H_{nep1}^2 , 频率指数为 $n_{epc} < n < n_{pc}$ 的微凸体的分布函数修正系数 H_{ne}^3 、 H_{nep1}^3 、 H_{nep2}^3 , 以及频率指数为 $n > n_{pc}$ 的微凸体的分布函数修正系数 H_{ne}^4 、 H_{nep1}^4 、 H_{nep2}^4 。

综上所述,对于包含频率指数为 $n_{min} < n < n_{max}$ 的微凸体的粗糙表面,卸载过程中的真实接触面积 A_r^u 和总接触载荷 F_r^u 分别为

$$A_r^u = A_{r1}^u + A_{r2}^u + A_{r3}^u + A_{r4}^u \quad (46a)$$

$$F_r^u = F_{r1}^u + F_{r2}^u + F_{r3}^u + F_{r4}^u \quad (46b)$$

将式(46)进行归一化处理,可得加载和卸载过程中粗糙表面的量纲一真实接触面积与量纲一总接触载荷

$$A_r^* = \frac{A_r}{A_a}; \quad F_r^* = \frac{F_r}{A_a E} \quad (47a)$$

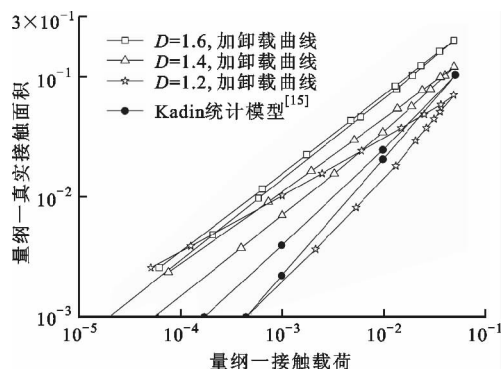
$$A_r^{u*} = \frac{A_r^u}{A_a}; \quad F_r^{u*} = \frac{F_r^u}{A_a E} \quad (47b)$$

式中: A_a 为名义接触面积, $A_a = L^2$, $L = \frac{1}{\gamma_{min}^{1/2}}$ 。

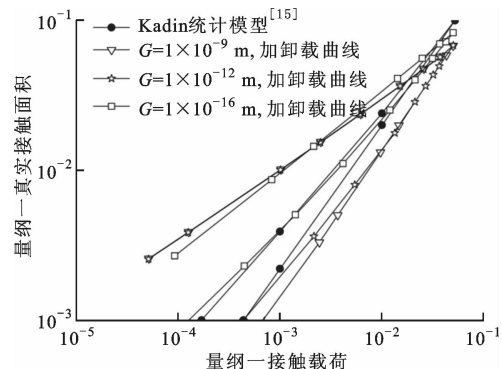
2 数值算例分析

图3所示为本文计算结果与Kadin统计模型的计算结果^[15]的对比。为确保对比结果可信,已知计

算参数采用Kadin模型的计算参数。已知计算参数为: $E/\sigma_y = 950$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 硬度 $H = 2.8\sigma_y$, $F_{max}/A_a H = 0.05$ 。由于统计接触模型中微凸体曲率半径都是相同的,所以本文分形模型中所有微凸体的曲率半径也取相同值—— $R \approx 1.5 \mu m$ 。由图3a可见,当分形维数较小时,本文模型与Kadin统计模型的计算结果较为接近,并具有相同的趋势;对于分形维数较大的粗糙表面,在同样的总接触载荷下会产生较大的接触面积,所以当粗糙表面分形维数增大时,加、卸载曲线整体向左偏移。由图3b可见,本文模型与Kadin统计模型的计算结果具有相同的趋势,随着尺度参数的减小,加载曲线向左偏移,卸载曲线产生的偏移量较小;在相同的总接触载荷下,本文模型计算的加、卸载之间的真实接触面积差大于Kadin统计模型的计算结果;尺度参数变化对加、卸载规律的影响较分形维数的影响小。Kadin统计模型和本文的分形模型是2种计算方法,相同之处是它们针对的都是单个微凸体的力学性质。在计算真实接触面积时,统计模型采用微凸体高度的高斯分布函数,分形模型采用微凸体的面积密度分布函数,所以会导致2种模型的计算结果较难完全重合,此外,由于统计模型中不涉及分形参数 D 和尺度参数



(a) $G = 1 \times 10^{-12} m$, $1.2 \leq D \leq 1.6$



(b) $1 \times 10^{-16} m \leq G \leq 1 \times 10^{-9} m$, $D = 1.2$

图3 量纲一总接触载荷与量纲一真实接触面积的关系

G 的选取,也会对计算结果的重合性有一定的影响。综上所述,本文分形模型的计算结果与统计模型的计算结果具有相同的趋势,当 $D=1.2$ 、 $G \leq 1 \times 10^{-12}$ m 时,本文模型的计算结果与 Kadin 模型的较为接近,说明了本文模型的可行性与可信性。

下面基于所推导出的解析结果,计算粗糙表面加、卸载过程中的接触力学性能。粗糙表面相关参数^[26]如下:分形维数 $D=1.4$,轮廓尺度参数 $G=1.36 \times 10^{-10}$ m,弹性模量 $E=72$ GPa,泊松比 $\nu=0.17$,硬度 $H=5.5$ GPa,频率指数 n 取 $26 \sim 50$,最大下压量 $\omega_n=0.9\delta_n$ 。

为了便于计算,假设粗糙表面在加、卸载过程中,具有不同频率指数的微凸体的下压量分别取自身高度的 Δh 倍,即 $\omega_n=\Delta h\delta_n$, $\frac{\omega_{n_{\min}}}{\delta_{n_{\min}}}=\frac{\omega_{n_{\min}+1}}{\delta_{n_{\min}+1}}=\dots=\frac{\omega_{n_{\max}}}{\delta_{n_{\max}}}=\Delta h$, $0 \leq \Delta h \leq 0.9$ 。根据选取的参数,微凸体的弹性、第一弹塑性和第二弹塑性临界频率指数分别为 $n_{ec}=31$, $n_{epc}=37$, $n_{pc}=46$ 。

图 4 表示频率指数 n 分别为 29、35 和 44 的单个微凸体在加载过程中接触载荷与接触面积的关系。由图 4a 可见,因为微凸体只能发生弹性变形,卸载过程中微凸体会完全回复自身形状,所以加载过程与卸载过程中接触载荷和接触面积的关系是一致的。由图 4b 可见:加载过程中当接触下压量与微凸体自身高度的比值为 0.3 时,该微凸体发生弹性变形,接触面积与接触载荷的关系为 $F \sim a^{3/2}$,卸载过程中接触载荷和接触面积的关系与加载过程中的关系重合;加载过程中当接触下压量大于微凸体自身高度的 0.367 倍时,微凸体发生第一弹塑性弹性变形,在该变形阶段,接触面积与接触载荷的关系为 $F \sim a^{1.2544}$;在卸载过程中,当接触载荷相同时,微凸体卸载时的接触面积大于加载时的接触面积,加载下压量越大,卸载时对应的接触面积也越大,这是由于微凸体发生了弹塑性变形,卸载过程中不能完全回复,导致卸载后微凸体的曲率半径增大,使得同等接触载荷条件下微凸体卸载时的接触面积大于加载时的接触面积。由图 4c 可见,当加载过程的下压量分别是微凸体自身高度的 0.3、0.6 和 0.9 倍时,对应的弹性变形量占非弹性变形量的 3%、1.5% 和 1%,整个变形过程呈现第二弹塑性状态,接触面积与接触载荷的关系为 $F \sim a^{1.1021}$;同理,加载时的下压量越大,卸载时对应的接触面积也越大。

图 5 表示微凸体频率指数范围为 $26 \sim 50$ 的粗

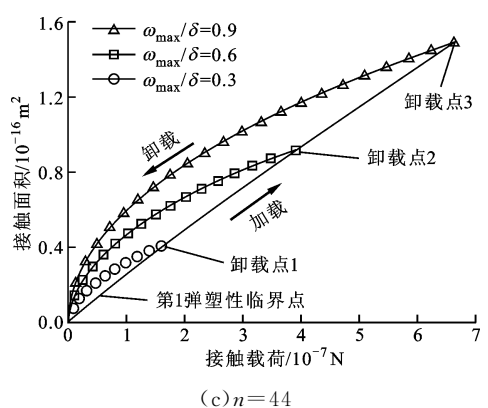
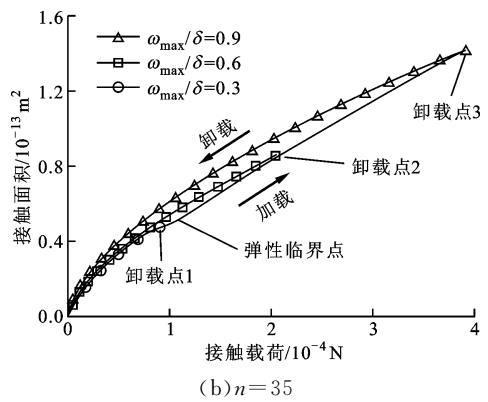
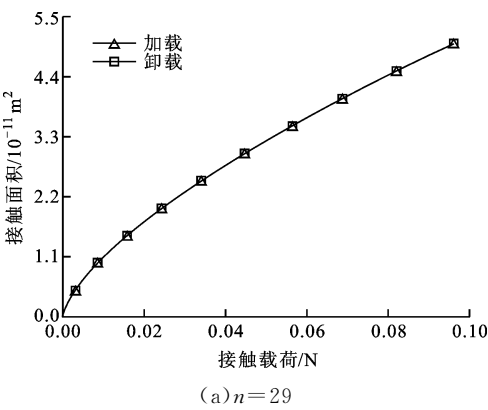


图 4 单个微凸体加卸载接触过程中接触载荷与接触面积的关系

糙表面接触时,加、卸载过程中量纲一总接触载荷与量纲一真实接触面积的关系。由图 5 可知,加载过程中量纲一总接触载荷和量纲一真实接触面积的关系近似为 $F_r^* \sim (A_r^*)^{3/2}$,卸载过程中二者的关系与加载过程中的关系完全重合,表明该粗糙表面在加、卸载过程中呈现弹性变形的性质。

图 6 表示微凸体频率指数范围为 $36 \sim 50$ 的粗糙表面接触时,加、卸载过程中量纲一总接触载荷与量纲一真实接触面积的关系。由图 6 可知:当下压量为每个微凸体自身高度的 0.9 倍时,粗糙表面发

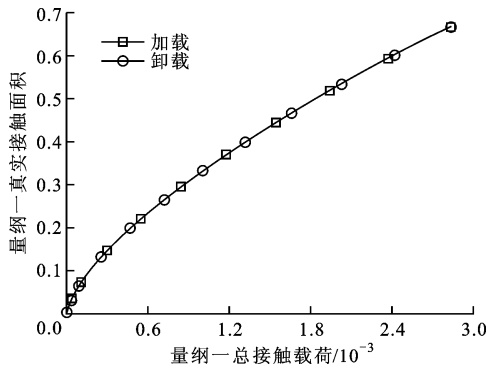


图5 粗糙表面加卸载过程中量纲一总接触载荷与量纲一真实接触面积的关系 ($n=26\sim50$)

生第一弹塑性和第二弹塑性变形;在加载过程与卸载过程中,除了加载起始点和卸载起始点外,接触面积与接触载荷的曲线不重合,这是由于微凸体发生了弹塑性变形,不能完全回复,导致其曲率半径增大,所以在相同的总接触载荷下,粗糙表面的卸载接触面积大于其加载接触面积;在相同总接触载荷的条件下,加、卸载对应的真实接触面积之差与接触下压量成正比,图中加、卸载对应的真实接触面积之差最大值为 0.030 4。

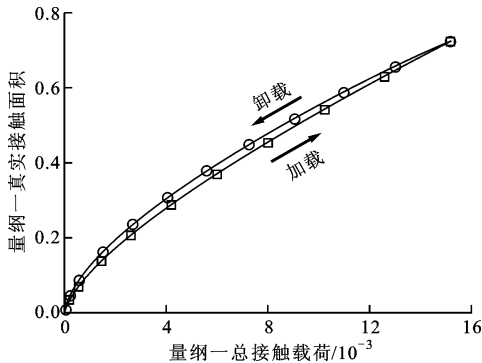


图6 粗糙表面加卸载过程中量纲一总接触载荷与量纲一真实接触面积的关系 ($n=36\sim50$)

图7表示微凸体频率指数范围为43~50的粗糙表面在加、卸载过程中量纲一接触载荷与量纲一真实接触面积的关系,接触下压量与微凸体自身高度的比值为0.9。由图7可见:除加、卸载起始点外,加载曲线与卸载曲线基本没有重合的部分;在相同的量纲一总接触载荷下,包含频率指数43~50的微凸体的粗糙表面量纲一卸载接触面积与加载接触面积的差值大于包含频率指数36~50的微凸体的粗糙表面的相应差值,前者的最大差值为0.085 8。因为微凸体的曲率半径与频率指数成反比,对于相同比率的下压量,频率指数越大,微凸体的塑性变形率也越大,所以粗糙表面包含的微凸体的频率指数

越大,则卸载真实接触面积与加载真实接触面积的差值越大。

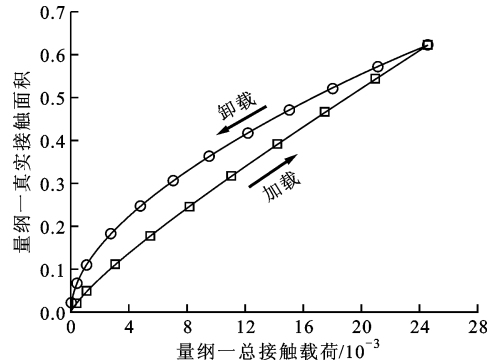


图7 粗糙表面加卸载过程中量纲一总接触载荷与量纲一真实接触面积的关系 ($n=43\sim50$)

图8表示粗糙表面中,各频率指数微凸体加、卸载过程中的接触面积占整个粗糙表面真实接触面积的比例(下压量 $\omega_n=0.5\delta_n$)。如图所示,对于给定频率指数范围的粗糙表面,具有确定频率指数的微凸体在加、卸载过程中,2种接触面积与真实接触面积的比值是近似的。该比值与微凸体的频率指数成反比,即具有最小频率指数的微凸体产生的接触面积最大,约占整个真实接触面积的50%以上

$$A_{26r}/\sum_{n=26}^{50} A_{nr} = 55.56\%$$

$$A_{36r}/\sum_{n=36}^{50} A_{nr} = 53.47\%$$

$$A_{43r}/\sum_{n=43}^{50} A_{nr} = 53.55\%$$

任意频率指数范围(图8所示为26~50、36~50和43~50)的粗糙表面中具有前6个频率指数的微凸体产生的接触面积占整个粗糙表面真实接触面积的98%以上

$$\sum_{n=26}^{31} A_{nr}/\sum_{n=26}^{50} A_{nr} = 99.23\%$$

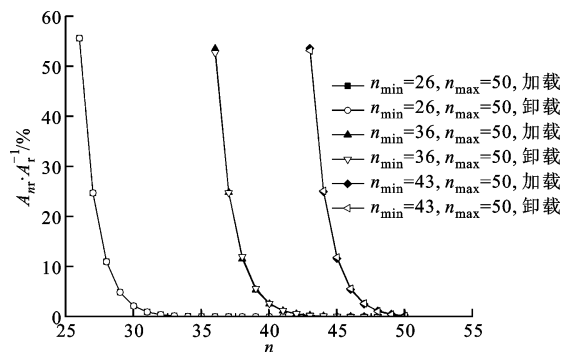


图8 具有不同频率指数的微凸体的接触面积与真实接触面积的比值

$$\sum_{n=36}^{41} A_{nr} / \sum_{n=36}^{50} A_{nr} = 98.96\%$$
$$\sum_{n=43}^{48} A_{nr} / \sum_{n=43}^{50} A_{nr} = 99.25\%$$

同理,图 9 中的总接触载荷具有相同的性质,具有前 6 个频率指数的微凸体产生的接触载荷占整个粗糙表面总接触载荷的 97% 以上

$$\sum_{n=26}^{31} F_{nr} / \sum_{n=26}^{50} F_{nr} = 97.94\%$$
$$\sum_{n=36}^{41} F_{nr} / \sum_{n=36}^{50} F_{nr} = 98.09\%$$
$$\sum_{n=43}^{48} F_{nr} / \sum_{n=43}^{50} F_{nr} = 99.29\%$$

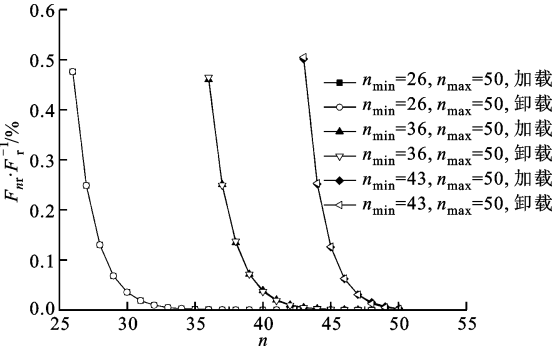


图 9 具有不同频率指数的微凸体的接触载荷与总接触载荷的比值

3 结 论

(1)分形粗糙表面中单个微凸体的接触力学性能和微凸体的频率指数有关;当微凸体的频率指数小于弹性临界频率指数时,微凸体只能发生弹性变形,否则微凸体将会发生弹性变形或非弹性变形;在一个加卸载接触循环内,当微凸体发生弹塑性变形时,卸载过程的接触面积大于加载过程的接触面积;加载过程的下压量越大,卸载过程中的接触面积也越大。

(2)当粗糙表面上微凸体的频率指数范围为 $n_{\min} \leq n \leq n_{\max}$ 时,在加卸载过程中,具有频率指数 $n_{\min}$ 的微凸体承担的总接触载荷和真实接触面积比例最大;随着频率指数的增大,其承担的总接触载荷和真实接触面积比例迅速减小;频率指数大于 $n_{\min} + 5$ 的微凸体对整个粗糙表面力学性能的贡献可以忽略不计。

(3)粗糙表面的加卸载力学性能取决于所包含的微凸体;当微凸体的最小频率指数 $n_{\min}$ 满足 $n_{\min} + 5 \leq n_{ec}$ 时,粗糙表面在整个加卸载接触过程中呈现

弹性性质;当 $n_{\min} > n_{ec}$ 时,在相同的总接触载荷条件下,卸载过程中的量纲一真实接触面积大于加载过程中的量纲一真实接触面积,接触下压量越大,二者的差值也越大;当接触下压量为微凸体自身高度的 90% 时,加、卸载过程中最大量纲一接触面积的差值范围为 0~0.085 8。上述结论与统计学方法所获得的结论^[15]是一致的。

参考文献:

[1] 胡兆稳,刘焜,王伟,等. 粗糙表面接触模型的研究现状和展望 [J]. 低温与超导, 2011, 39(12): 71-74.
HU Zhaowen, LIU Kun, WANG Wei, et al. Review and prospect of contact models of rough surfaces [J]. Cryogenics & Superconductivity, 2011, 39(12): 71-74.

[2] 黄健萌,高诚辉,李友遐,等. 工程粗糙表面接触摩擦热力学研究进展 [J]. 中国工程机械学报, 2007, 5(4): 490-496.
HUANG Jianmeng, GAO Chenghui, LI Youxia, et al. Advances of frictional contact thermodynamics for fractal rough surfaces [J]. Chinese Journal of Construction Machinery, 2007, 5(4): 490-496.

[3] 李辉光,刘恒,虞烈. 粗糙机械结合面的接触刚度研究 [J]. 西安交通大学学报, 2011, 45(6): 69-74.
LI Huiguang, LIU Heng, YU Lie. Contact stiffness of rough mechanical joint surface [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2011, 45(6): 69-74.

[4] 王庆朋,张力,杜宝程,等. 粗糙表面确定性接触模型中峰的再定义 [J]. 西安交通大学学报, 2016, 50(11): 115-120.
WANG Qingpeng, ZHANG Li, DU Baocheng, et al. Re-definition of asperity-peak for deterministic contact model on rough surfaces [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2016, 50(11): 115-120.

[5] PEI L, HYUN S, MOLINARI J F, et al. Finite element modeling of elasto-plastic contact between rough surfaces [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2005, 53(11): 2385-2409.

[6] JACKSON R L, STREATOR J L. A multi-scale model for contact between rough surfaces [J]. Wear, 2006, 261(11): 1337-1347.

[7] GREENWOOD J, WILLIAMSON J. Contact of nominally flat surfaces [J]. Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1966, 295(1442): 299-319.

[8] GREENWOOD J A, TRIPP J H. The elastic contact of rough spheres [J]. Journal of Applied Mechanics, 1967, 34(1): 153-159.

- [9] GREENWOOD J, TRIPP J. The contact of two nominally flat rough surfaces [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1970, 185(1): 625-633.
- [10] PULLEN J, WILLIAMSON J B P. On the plastic contact of rough surfaces [J]. Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1972, 327(1569): 159-173.
- [11] CHANG W, ETSION I, BOGY D B. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1987, 109(2): 257-263.
- [12] LIN Y Y, HUI C Y. Mechanics of contact and adhesion between viscoelastic spheres: an analysis of hysteresis during loading and unloading [J]. Journal of Polymer Science: Part B Polymer Physics, 2002, 40(9): 772-793.
- [13] KOGUT L, ETSION I. Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat [J]. Journal of Applied Mechanics, 2002, 69(5): 657-662.
- [14] ETSION I, KLIGERMAN Y, KADIN Y. Unloading of an elastic-plastic loaded spherical contact [J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(13): 3716-3729.
- [15] KADIN Y, KLIGERMAN Y, ETSION I. Unloading an elastic-plastic contact of rough surfaces [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2006, 54(12): 2652-2674.
- [16] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1990, 112(2): 205-216.
- [17] MAJUMDAR A, TIEN C. Fractal characterization and simulation of rough surfaces [J]. Wear, 1990, 136(2): 313-327.
- [18] MAJUMDAR A, BHUSHAN B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1991, 113(1): 1-11.
- [19] WANG S, KOMVOPOULOS K. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime: part I Elastic contact and heat transfer analysis [J]. ASME Journal of Tribology, 1994, 116(4): 812-822.
- [20] WANG S, KOMVOPOULOS K. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime: part II Multiple domains, elastoplastic contacts and applications [J]. ASME Journal of Tribology, 1994, 116(4): 824-832.
- [21] MORAG Y, ETSION I. Resolving the contradiction of asperities plastic to elastic mode transition in current contact models of fractal rough surfaces [J]. Wear, 2007, 262(5/6): 624-629.
- [22] MIAO X, HUANG X. A complete contact model of a fractal rough surface [J]. Wear, 2014, 309(1/2): 146-151.
- [23] 丁雪兴, 严如奇, 贾永磊. 基于基底长度的粗糙表面分形接触模型的构建与分析 [J]. 摩擦学学报, 2014, 34(4): 341-347.
- DING Xuexing, YAN Ruqi, JIA Yonglei. Construction and analysis of fractal contact mechanics model for rough surface based on base length [J]. Tribology, 2014, 34(4): 341-347.
- [24] YUAN Y, CHENG Y, LIU K, et al. A revised Majumdar and Bushan model of elastoplastic contact between rough surfaces [J]. Applied Surface Science, 2017, 425: 1138-1157.
- [25] 成雨, 原园, 甘立, 等. 尺度相关的分形粗糙表面弹塑性接触力学模型 [J]. 西北工业大学学报, 2016, 34(3): 485-492.
- CHENG Yu, YUAN Yuan, GAN Li, et al. The elastic-plastic contact mechanics model related scale of rough surface [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2016, 34(3): 485-492.
- [26] YAN W, KOMVOPOULOS K. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces [J]. Journal of Applied Physics, 1998, 84(7): 3617-3624.

(编辑 葛赵青)